Equazioni a variabili separabili

$$\begin{cases} y' = a(x)\, f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a, f sono funzioni continue.

Supponiamo $f(y_0) \neq 0$.

f è continua quindi $f(y) \neq 0$ in un intorno di y_0.

divido per $f(y)$

$$\boxed{\frac{y'}{f(y)} = a(x)}$$

Sia $G(y)$ una primitiva di $\frac{1}{f}$

cioè $\frac{dG}{dy} = \frac{1}{f(y)}$

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ cioè $\frac{dA}{dx} = a(x)$.

calcoliamo

$$\frac{d}{dx}\left(G(y(x))\right) = \frac{dG}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{1}{f(y)} \cdot y' \qquad \text{quindi}$$

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = a(x)$$

integro in dx

$G(y(x)) = A(x) + c \quad (*)$

G è invertibile?

$G' = \frac{1}{f} \neq 0 \Rightarrow G$ è monotona

$\Rightarrow G$ è invertibile (localmente).

$\Rightarrow \exists\ G^{-1}$ (inversa)

$(*)\ y(x) = G^{-1}(A(x) + c)$.

E se $f(y_0) = 0$?

$$\begin{cases} y' = a(x) f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y(x) = y_0$ costante è soluzione.

infatti $y'(x) = 0$

$a(x) f(y) = a(x) f(y_0) = 0$

$0 = 0$. soluzione.

Es:
$$\begin{cases} y' = -\left(\dfrac{6x+3}{x^2+x+1}\right)(y-1)^2 \\ y(0) = \dfrac{3\log 3 - 1}{3\log 3} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{6x+3}{x^2+x+1}\right)(y-1)^2$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = -\int \frac{6x+3}{x^2+x+1}\,dx + c$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = -\frac{1}{y-1}$$

$$-\int \frac{6x+3}{x^2+x+1}\,dx = -3\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= -3\log\left|x^2+x+1\right|$$

$x^2 + x + 1 = 0$?

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \qquad \underline{\text{mai}}.$$

$\Rightarrow x^2 + x + 1 > 0$ il valore assoluto non serve.

$$+\frac{1}{y-1} = +3 \log(x^2+x+1) \mp c$$

ricavo c dalla condizione iniziale.

$$y(\underline{\underline{0}}) = \frac{3\log 3 - 1}{3\log 3} = \underbrace{1 - \frac{1}{3\log 3}}$$

nell'equazione sostituisco

$\underline{\underline{0}}$ al posto di x

e $\underbrace{1 - \frac{1}{3\log 3}}$ al posto di y

$$\frac{1}{\cancel{1}-\frac{1}{3\log 3}-\cancel{1}} = 3\,\cancel{\log(0+0+1)} - c$$

$$-3\log 3 = -c \qquad c = 3\log 3$$

$$\frac{1}{y-1} = 3\log(x^2+x+1) - 3\log 3$$

$$= 3\log\left(\frac{x^2+x+1}{3}\right)$$

$$y - 1 = \frac{1}{3} \frac{1}{\log\left(\frac{x^2 + x + 1}{3}\right)}$$

$$y = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{x^2 + x + 1}{3}\right)}$$

<u>Es</u>: $\begin{cases} y' = -\dfrac{6x+3}{x^2+x+1}(y-1)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$y(x) = 1 \quad \forall x$

<u>costante</u>

Es: $\begin{cases} y' = \operatorname{tg} x \cos^2 y \,. \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \operatorname{tg} x \, dx + c$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \operatorname{tg} y$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$= -\log|\cos x|$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} y = -\log|\cos x| + c$$

ricavo c da $y(0) = 1$

$$\operatorname{tg} 1 = -\log|\cancel{\cos(0)}| + c$$

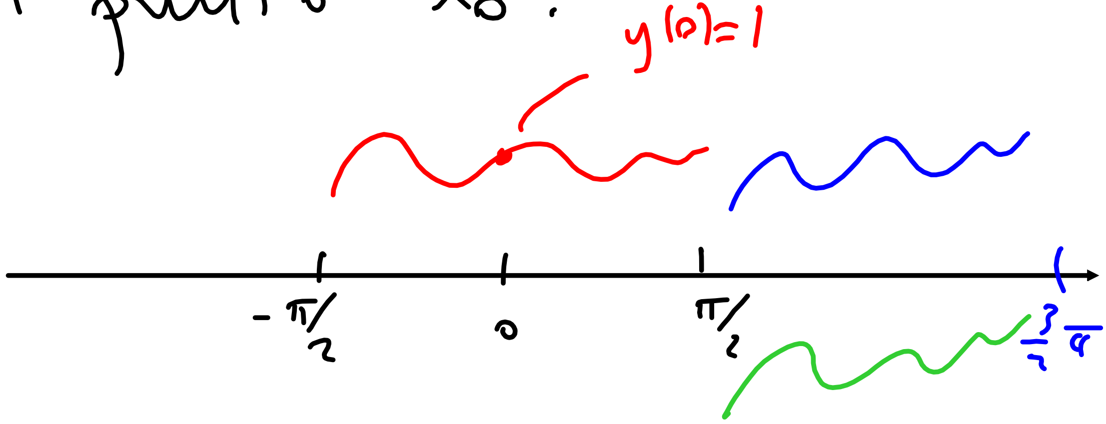
$$\operatorname{tg} y = -\log|\cos x| + \operatorname{tg} 1$$

$$y = \operatorname{arctg}\left(-\log|\cos x| + \operatorname{tg} 1\right)$$

esiste se $\cos x \neq 0$

cioè $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

La soluzione di un problema di Cauchy è definita su un __intervallo__ che contiene il punto x_0.



Equazioni differenziali lineari del 2° ordine a coeff. costanti omogenee.

$$y'' + ay' + by = 0$$

$a, b \in \mathbb{R}$ costanti

Oss: se y_1 e y_2 sono soluzioni allora $y_1 + y_2$ è soluzione e se $k \in \mathbb{R} \Rightarrow k y_1$ è soluzione.

Come si risolvono?

provo con una funzione tipo $y(x) = e^{\lambda x}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

sostituisco nell'equazione

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

$$\cancel{e^{\lambda x}} (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \qquad e^{\lambda x} > 0$$

$e^{\lambda x}$ è soluzione se λ risolve

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

polinomio caratteristico dell'equaz. differenziale.

Es: $y'' - y' - 6y = 0$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

ho trovato 2 soluzioni

$$y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}$$

<u>Oss</u>: Se ho 2 soluzioni
y_1 e y_2 allora per qualunque
scelta di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la funzione
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$
risolve l'equazione.

Oss: Se λ_1, λ_2 sono radici del polinomio caratteristico e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\Rightarrow$ ogni soluzione dell'equazione differ. si scrive come

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

e si dice che $y_1 = e^{\lambda_1 x}$

$y_2 = e^{\lambda_2 x}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni.

Le soluzioni

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

si dicono integrale generale dell'equazione differenziale.

Se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

ha una sola radice ?

λ_0 radice unica.

$\Rightarrow e^{\lambda_0 x}$ risolve l'equazione.

Come altra soluzione

scelgo $y_2(x) = x e^{\lambda_0 x}$

sono un sistema fondamentale di soluzioni, quindi l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Es: $y'' + y' = 0$

$\lambda^2 + \lambda = 0 \qquad \lambda(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -1$ due radici distinte.

$y_1 = e^{0\cdot x} = 1 \qquad y_2 = e^{-1\cdot x} = e^{-x}$

$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$

Es di radici coincidenti.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \qquad \lambda = 2$$

unica radice

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

integrale generale